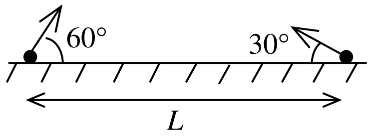
ОЛИМПИАДА “БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ – БУДУЩЕЕ НАУКИ” 2020-2021
Физика, II тур

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

11 класс

1. (25 баллов) Два тела бросили одновременно из точек на поверхности земли, удаленных друг от друга на расстояние L. Векторы начальных скоростей тел лежат в одной вертикальной плоскости и составляют с горизонтом углы 30° и 60° (см. рис.). Какого минимального значения достигает расстояние между находящимися в полете телами, если дальности полета тел равны L?



Ответ: Минимальное расстояние равно $L\sin 15° = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}L \approx 0{,}26L$.

Решение: Прежде всего, используя формулу для дальности полета тела, брошенного с начальной скоростью V_0 под углом α к горизонту, $L = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g}$ (g – ускорение свободного падения) и учитывая, что $\sin(2\cdot 30°) = \sin(2\cdot 60°)$, делаем вывод о равенстве начальных скоростей тел. Записывая далее зависимости координат тел от времени в виде

$$x_1(t) = V_0\cos 60° t,\quad y_1(t) = V_0 \sin 60° t - gt^2/2,$$
$$x_2(t) = L - V_0\cos 30° t,\quad y_2(t) = V_0\sin 30°\, t - gt^2/2,$$

вычисляем расстояние между телами по формуле

$$R = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2} = \sqrt{\left(\sqrt{2}V_0 t - \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}L\right)^2 + \frac{2-\sqrt{3}}{4}L^2}.$$

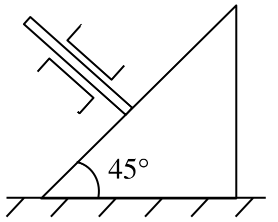
Видно, что расстояние R достигает минимума $R_{\min} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}L \approx 0{,}26L$ в момент времени $t_{\min} = \frac{1+\sqrt{3}}{4}\frac{L}{V_0} \approx 0{,}68\frac{L}{V_0}$. Теперь необходимо проверить, что время $t_{\min}$ не превосходит времен полета тел. Наименьшее время полета имеет тело, брошенное под углом 30°. Записывая это время как $t_{30°} = \frac{L}{V_0\cos 30°} = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{L}{V_0} \approx 1{,}15\frac{L}{V_0}$, видим, что $t_{\min} < t_{30°}$. Следовательно, найденное значение $R_{\min}$ и является ответом.

Другой способ решения задачи основан на рассмотрении движения одного тела относительно другого. Поскольку ускорения тел одинаковы (равны ускорению свободного падения), то их относительная скорость не меняется со временем ни по направлению, ни по величине и остается равной ее начальному значению:

$$V_{\text{отн}} = 2V_0\sin 45° = \sqrt{2}V_0.$$

При этом одно тело движется относительно другого по прямой, составляющей угол 15° с горизонтом. Чтобы найти наименьшее расстояние между телами, нужно опустить перпендикуляр на эту прямую из точки нахождения другого (неподвижного) тела. Наименьшее расстояние между телами – это катет прямоугольного треугольника с гипотенузой L, равный $R_{\min} = L\sin 15° = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}L \approx 0{,}26L$. Время достижения минимального расстояния находится как $t_{\min} = \frac{L\cos 15°}{V_{\text{отн}}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2\sqrt{2}}\frac{L}{V_0} = \frac{1+\sqrt{3}}{4}\frac{L}{V_0} \approx 0{,}68\frac{L}{V_0}$. Так же, как и в первом способе решения, это время необходимо сравнить с $t_{30°}$.

2. (25 баллов) На гладком горизонтальном столе находится клин с углом 45° при основании. На гладкую наклонную грань клина давит стержень, который из-за направляющих может двигаться только перпендикулярно наклонной грани клина (см. рис.). Трение между стержнем и направляющими отсутствует. Масса стержня равна массе клина. Найти ускорение клина. Ускорение свободного падения равно g.



Ответ: Ускорение клина равно $g/3$.

Решение: Обозначив через N силу давления стержня на клин, запишем второй закон Ньютона для клина в проекции на горизонтальную ось

$$ma_1 = N\frac{\sqrt{2}}{2},$$

где a_1 – ускорение клина, m – его масса. Второй закон Ньютона для стержня в проекции на перпендикулярную наклонной грани клина ось запишем в виде

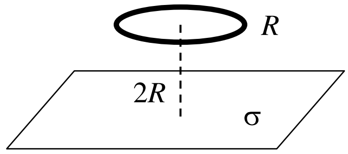
$$ma_2 = mg\frac{\sqrt{2}}{2} - N,$$

где a_2 – ускорение стержня. Из условия равенства проекций ускорений стержня и клина на ось, перпендикулярную наклонной грани клина (кинематическая связь), следует, что

$$a_2 = a_1\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Из системы записанных уравнений находим, что $a_1 = g/3$.

3. (25 баллов) Тонкое кольцо радиуса R с равномерно распределенным по нему электрическим зарядом расположено параллельно плоскости, по которой равномерно распределен заряд с плотностью σ. Расстояние между кольцом и плоскостью равно $2R$. При каком заряде кольца разность потенциалов между центром кольца и точкой пересечения оси кольца с плоскостью равна нулю? Чему равна при этом напряженность электрического поля посередине между указанными точками? *Указание.* Заряженная плоскость создает однородное поле с напряженностью $\sigma/(2\varepsilon_0)$, где ε_0 – электрическая постоянная.



Ответ: Заряд кольца равен $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}4\pi R^2\sigma$. Напряженность поля равна $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{5}(\sqrt{2}-1)}{2\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)}\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$.

Решение: По принципу суперпозиции для потенциала разность потенциалов между точками 1 (центр кольца) и 2 (точка пересечения) складывается из разностей потенциалов, создаваемых кольцом и плоскостью, т.е. может быть записана в виде

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{5}R} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}2R,$$

где через q обозначен искомый заряд кольца. Накладывая условие $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$, находим

$$q = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}4\pi R^2\sigma.$$

Электрическое поле в искомой точке находим как векторную сумму противоположно направленных полей кольца и плоскости. Вычитая из поля кольца

$$\frac{q}{8\pi\varepsilon_0\sqrt{2}R^2} = \frac{\sigma\sqrt{5}}{2\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)\varepsilon_0}$$

поле плоскости $\sigma/(2\varepsilon_0)$, находим, что результирующее поле равно

$$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{5}(\sqrt{2}-1)}{2\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)}\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

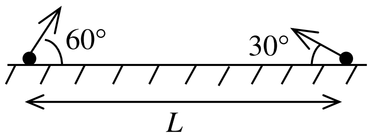
(из положительности данного выражения следует, что поле направлено в сторону плоскости).

4. (25 баллов) Груз массы m, подвешенный к потолку на пружине жесткости k, совершает колебания с амплитудой $mg/(2k)$, где g – ускорение свободного падения. В момент, когда растяжение пружины минимально, ее середину закрепляют. Найти амплитуду последующих колебаний груза.

Ответ: Амплитуда колебаний станет равной $mg/(4k)$.

Решение: До закрепления середины пружины груз колеблется около положения равновесия, в котором пружина растянута на mg/k. Растяжение пружины минимально при прохождении грузом верхнего положения и равно $mg/(2k)$. В момент закрепления середины пружины растяжение половины пружины равно $mg/(4k)$. В ходе последующих колебаний растяжение пружины в положении равновесия будет равно $mg/(2k)$, т.к. жесткость половины пружины равна $2k$. Амплитуду последующих колебаний находим как разность растяжений пружины в положении равновесия и в верхнем (начальном) положении $mg/(2k)$ - $mg/(4k)$ = $mg/(4k)$.

10 класс



1. (25 баллов) Два тела бросили одновременно из точек на поверхности земли, удаленных друг от друга на расстояние L. Векторы начальных скоростей тел лежат в одной вертикальной плоскости и составляют с горизонтом углы 30° и 60° (см. рис.). Какого минимального значения достигает расстояние между находящимися в полете телами, если дальности полета тел равны L?

Ответ: Минимальное расстояние равно $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}L \approx 0{,}26L$.

Решение: Прежде всего, используя формулу для дальности полета тела, брошенного с начальной скоростью V_0 под углом α к горизонту, $L = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g}$ (g – ускорение свободного падения) и учитывая, что $\sin(2\cdot 30°) = \sin(2\cdot 60°)$, делаем вывод о равенстве начальных скоростей тел. Записывая далее зависимости координат тел от времени в виде

$$x_1(t) = V_0\cos 60° t,\quad y_1(t) = V_0 \sin 60° t - gt^2/2,$$
$$x_2(t) = L - V_0\cos 30° t,\quad y_2(t) = V_0 \sin 30° t - gt^2/2,$$

вычисляем расстояние между телами по формуле

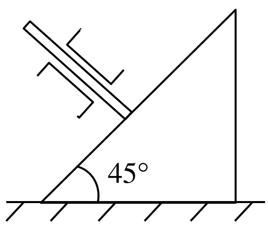
$$R = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{\left(\sqrt{2}V_0 t - \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}L\right)^2 + \frac{2-\sqrt{3}}{4}L^2}.$$

Видно, что расстояние R достигает минимума $R_{\min} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}L \approx 0{,}26L$ в момент времени $t_{\min} = \frac{1+\sqrt{3}}{4}\frac{L}{V_0} \approx 0{,}68\frac{L}{V_0}$. Теперь необходимо проверить, что время $t_{\min}$ не превосходит времен полета тел. Наименьшее время полета имеет тело, брошенное под углом 30°. Записывая это время как $t_{30°} = \frac{L}{V_0\cos 30°} = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{L}{V_0} \approx 1{,}15\frac{L}{V_0}$, видим, что $t_{\min} < t_{30°}$. Следовательно, найденное значение $R_{\min}$ и является ответом.

Другой способ решения задачи основан на рассмотрении движения одного тела относительно другого. Поскольку ускорения тел одинаковы (равны ускорению свободного падения), то их относительная скорость не меняется со временем ни по направлению, ни по величине и остается равной ее начальному значению:

$$V_{\text{отн}} = 2V_0 \sin 45° = \sqrt{2}V_0.$$

При этом одно тело движется относительно другого по прямой, составляющей угол 15° с горизонтом. Чтобы найти наименьшее расстояние между телами, нужно опустить перпендикуляр на эту прямую из точки нахождения другого (неподвижного) тела. Наименьшее расстояние между телами – это катет прямоугольного треугольника с гипотенузой L, равный $R_{\min} = L\sin 15° = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}L \approx 0{,}26L$. Время достижения минимального расстояния находится как $t_{\min} = \frac{L\cos 15°}{V_{\text{отн}}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2\sqrt{2}}\frac{L}{V_0} = \frac{1+\sqrt{3}}{4}\frac{L}{V_0} \approx 0{,}68\frac{L}{V_0}$. Так же, как и в первом способе решения, это время необходимо сравнить с $t_{30°}$.



2. (25 баллов) На гладком горизонтальном столе находится клин с углом 45° при основании. На гладкую наклонную грань клина давит стержень, который из-за направляющих может двигаться только перпендикулярно наклонной грани клина (см. рис.). Трение между стержнем и направляющими отсутствует. Масса стержня равна массе клина. Найти ускорение клина. Ускорение свободного падения равно g.

Ответ: Ускорение клина равно $g/3$.

Решение: Обозначив через N силу давления стержня на клин, запишем второй закон Ньютона для клина в проекции на горизонтальную ось

$$ma_1 = N\frac{\sqrt{2}}{2},$$

где a_1 – ускорение клина, m – его масса. Второй закон Ньютона для стержня в проекции на перпендикулярную наклонной грани клина ось запишем в виде

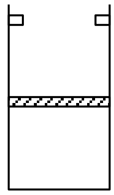
$$ma_2 = mg\frac{\sqrt{2}}{2} - N,$$

где a_2 – ускорение стержня. Из условия равенства проекций ускорений стержня и клина на ось, перпендикулярную наклонной грани клина (кинематическая связь), следует, что

$$a_2 = a_1\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Из системы записанных уравнений находим, что $a_1 = g/3$.

3. (25 баллов) Идеальный одноатомный газ находится в вертикальном сосуде и отделен от атмосферы тяжелым поршнем, который может скользить по стенкам сосуда без трения. Упоры на стенках допускают увеличение объема газа не более, чем вдвое (см. рис.). Начальное давление газа в два раза превышает атмосферное. Газу сообщают количество теплоты, в три раза большее его внутренней энергии U_0, и после этого располагают сосуд горизонтально. Какое количество теплоты нужно отвести от газа при новом положении сосуда, чтобы газ вернулся к первоначальному объему?



Ответ: Нужно отвести количество теплоты, равное $\frac{19}{6}U_0$.

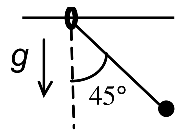
Решение: Для решения удобно использовать формулу $pV = \frac{2}{3}U$, которая следует из уравнения Клапейрона-Менделеева $pV = \nu RT$ и выражения для внутренней энергии одноатомного газа $U = \frac{3}{2}\nu RT$. В начальном состоянии $2p_{\text{а}}V_0 = \frac{2}{3}U_0$, где $p_{\text{а}}$ – атмосферное давление. При сообщении газу теплоты вначале будет происходить его изобарное расширение. Проверим, достаточно ли количества теплоты $3U_0$ для увеличения объема газа вдвое, т.е. для расширения до упоров. Согласно первому принципу термодинамики ($Q = \Delta U + A$) для этого требуется количество теплоты $Q_1 = U_0 + 2p_{\text{а}}V_0 = U_0 + \frac{2}{3}U_0 = \frac{5}{3}U_0$, что меньше $3U_0$. Следовательно, газ расширится до упоров. При сообщении газу остального количества теплоты $3U_0 - \frac{5}{3}U_0 = \frac{4}{3}U_0$ произойдет изохорный нагрев газа, его давление при этом увеличится на $\frac{4}{3}p_{\text{а}}$ до значения $\frac{10}{3}p_{\text{а}}$. После приведения сосуда в горизонтальное положение поршень перестанет давить на газ своим весом. Вследствие этого при отборе тепла от газа его объем начнет уменьшаться только после того, как давление изохорно уменьшиться до $p_{\text{а}}$. Уменьшение объема будет происходить при постоянном давлении $p_{\text{а}}$. Чтобы найти, какое количество теплоты Q' нужно отвести от газа для возвращения его к объему V_0, запишем первый принцип термодинамики для процесса в целом:

$$3U_0 - Q' = \left(\frac{1}{2}U_0 - U_0\right) + (2p_{\text{а}}V_0 - p_{\text{а}}V_0),$$

где учтено, что в конечном состоянии внутренняя энергия газа в 2 раза меньше, чем в начальном (давление в 2 раза меньше при том же объеме), а работу газ совершал при давлениях $2p_{\text{а}}$ (при расширении) и $p_{\text{а}}$ (при сжатии). Учитывая, что $p_{\text{а}}V_0 = \frac{1}{3}U_0$, находим

$$Q' = \frac{19}{6}U_0.$$

4. (25 баллов) Кольцо, которое может скользить без трения по неподвижной горизонтальной спице, и прикрепленный к ней с помощью нити шарик удерживают в положении, когда нить составляет угол 45° с вертикалью (см. рис.). Считая нить идеальной и массы шарика и кольца равными, найти ускорение кольца сразу после освобождения тел. Ускорение свободного падения равно g.



Ответ: Ускорение кольца равно $g/3$.

Решение: Обозначив через a_1 ускорение кольца, а через T силу натяжения нити, запишем второй закон Ньютона для кольца в проекции на направление спицы в виде

$$ma_1 = T\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ускорение шарика разложим на две компоненты – горизонтальную, которая равна по величине ускорению кольца a_1 и противоположна ему по направлению (в силу сохранения импульса системы в проекции на горизонтальную ось) и вертикальную, которую обозначим через a_2. Запишем второй закон Ньютона для шарика в проекции на вертикальную ось

$$ma_2 = mg - T\frac{\sqrt{2}}{2},$$

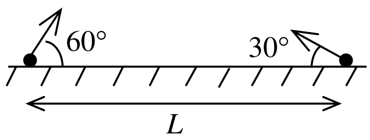
а также условие равенства проекций ускорений кольца и шарика на нить (кинематическую связь)

$$a_2\frac{\sqrt{2}}{2} - a_1\frac{\sqrt{2}}{2} = a_1\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Из системы записанных уравнений находим, что $a_1 = g/3$.

9 класс

1. (25 баллов) Два тела бросили одновременно из точек на поверхности земли, удаленных друг от друга на расстояние L. Векторы начальных скоростей тел лежат в одной вертикальной плоскости и составляют с горизонтом углы 30° и 60° (см. рис.). Какого минимального значения достигает расстояние между находящимися в полете телами, если дальности полета тел равны L?



Ответ: Минимальное расстояние равно $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}L \approx 0{,}26L$.

Решение: Прежде всего, используя формулу для дальности полета тела, брошенного с начальной скоростью V_0 под углом α к горизонту, $L = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g}$ (g – ускорение свободного падения) и учитывая, что $\sin(2 \cdot 30°) = \sin(2 \cdot 60°)$, делаем вывод о равенстве начальных скоростей тел. Записывая далее зависимости координат тел от времени в виде

$$x_1(t) = V_0 \cos 60° t, \quad y_1(t) = V_0 \sin 60° t - gt^2/2,$$
$$x_2(t) = L - V_0 \cos 30° t, \quad y_2(t) = V_0 \sin 30°\, t - gt^2/2,$$

вычисляем расстояние между телами по формуле

$$R = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{\left(\sqrt{2}V_0 t - \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}L\right)^2 + \frac{2-\sqrt{3}}{4}L^2}.$$

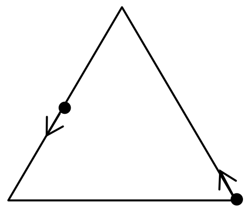
Видно, что расстояние R достигает минимума $R_{\min} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}L \approx 0{,}26L$ в момент времени $t_{\min} = \frac{1+\sqrt{3}}{4}\frac{L}{V_0} \approx 0{,}68\frac{L}{V_0}$. Теперь необходимо проверить, что время $t_{\min}$ не превосходит времен полета тел. Наименьшее время полета имеет тело, брошенное под углом 30°. Записывая это время как $t_{30°} = \frac{L}{V_0 \cos 30°} = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{L}{V_0} \approx 1{,}15\frac{L}{V_0}$, видим, что $t_{\min} < t_{30°}$. Следовательно, найденное значение $R_{\min}$ и является ответом.

Другой способ решения задачи основан на рассмотрении движения одного тела относительно другого. Поскольку ускорения тел одинаковы (равны ускорению свободного падения), то их относительная скорость не меняется со временем ни по направлению, ни по величине и остается равной ее начальному значению:

$$V_{\text{отн}} = 2V_0 \sin 45° = \sqrt{2}V_0.$$

При этом одно тело движется относительно другого по прямой, составляющей угол 15° с горизонтом. Чтобы найти наименьшее расстояние между телами, нужно опустить перпендикуляр на эту прямую из точки нахождения другого (неподвижного) тела. Наименьшее расстояние между телами – это катет прямоугольного треугольника с гипотенузой L, равный $R_{\min} = L \sin 15° = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}L \approx 0{,}26L$. Время достижения минимального расстояния находится как $t_{\min} = \frac{L \cos 15°}{V_{\text{отн}}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2\sqrt{2}}\frac{L}{V_0} = \frac{1+\sqrt{3}}{4}\frac{L}{V_0} \approx 0{,}68\frac{L}{V_0}$. Так же, как и в первом способе решения, это время необходимо сравнить с $t_{30°}$.

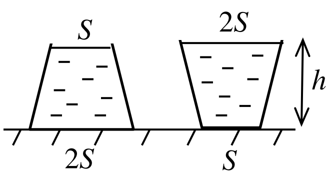
2. (25 баллов) Два жучка одновременно начинают движение с равными скоростями по сторонам правильного треугольника: один из вершины, другой с середины стороны (см. рис.). Каким будет минимальное расстояние между жучками, если сторона треугольника равна a?



Ответ: Минимальное расстояние равно $3a/4$.

Решение: Расстояние между жучками станет минимальным в тот момент, когда каждый из них пройдет расстояние $a/4$ и соединяющий жучков отрезок прямой станет параллельным основанию треугольника. Действительно, в этот момент скорости жучков будут направлены под одним и тем же углом к данной прямой, и скорость сближения жучков обратится в нуль. Соединяющий жучков отрезок при этом будет стороной правильного треугольника, его длина будет равна $3a/4$.

3. (25 баллов) В откачанном от воздуха помещении стоят две заполненные жидкостью колбы в виде усеченных конусов (см. рис.). На сколько отличаются силы, действующие на жидкость со стороны боковых стенок в этих сосудах? Плотность жидкости равна ρ, ускорение свободного падения g. *Указание*. Объем колбы $V = hS(1 + \sqrt{2}/3) \approx 1{,}47hS$.



Ответ: Силы отличаются на $\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}-1\right)\rho g h S \approx 0.06\rho g h S$.

Решение: Запишем условие баланса сил, действующих на жидкость в сужающемся кверху сосуде, в виде

$$F_{д1} = mg + F_{ст1},$$

где $F_{д1}$ – сила, с которой дно действует на жидкость, mg – действующая на жидкость сила тяжести и $F_{ст1}$ – сила со стороны стенок. Аналогично для расширяющегося кверху сосуда запишем

$$F_{д2} + F_{ст2} = mg.$$

Складывая уравнения и учитывая, что $F_{д1} = \rho g h 2S$, $F_{д2} = \rho g h S$ и $mg = \rho V g = \rho g h S\left(1+\sqrt{2}/3\right)$, получаем

$$F_{ст1} - F_{ст2} = 3\rho g h S - 2\left(1+\sqrt{2}/3\right)\rho g h S = \left(1-2\sqrt{2}/3\right)\rho g h S \approx 0{,}057\rho g h S.$$

4. (25 баллов) На дне цилиндрического сосуда лежит шар радиуса R. Когда в сосуд налили объем V воды, сила давления шара на дно уменьшилась до 4/9 от первоначального значения. После доливания такого же объема масла с плотностью 0,8 плотности воды сила давления шара на дно обратилась в нуль. Найти площадь дна сосуда. *Указание.* Объем шара $V_ш$ связан с его радиусом формулой $V_ш = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Ответ: Площадь дна сосуда равна $\frac{V}{R} + \frac{2}{3}\pi R^2$.

Решение: Запишем условие баланса действующих на шар сил до наливания воды

$$mg = N_0$$

(m – масса шара, g – ускорение свободного падения, N_0 – первоначальное значение силы давления шара на дно), после наливания воды

$$mg = \frac{4}{9}N_0 + \rho_в V_в g$$

($\rho_в$ – плотность воды, $V_в$ – объем погруженной в воду части шара) и после доливания масла

$$mg = 0 + \rho_в V_в g + 0{,}8\rho_в V_м g$$

($V_м$ – объем погруженной в масло части шара). Из записанных соотношений следует, что $V_м = V_в$. При одинаковых объемах воды и масла данное равенство может быть выполнено только в том случае, когда слои воды и масла имеют одинаковую толщину R, т.е. вода доходит до середины шара, а поверхность масла находится на уровне вершины шара. Для объема части сосуда, где находится вода и нижняя половина шара, можно записать такое равенство

$$SR = V + \frac{1}{2}V_ш = V + \frac{2}{3}\pi R^3,$$

откуда для площади дна S получаем

$$S = \frac{V}{R} + \frac{2}{3}\pi R^2.$$

8 класс

1. (25 баллов) Два пассажира одновременно вступили на ленту движущегося вниз эскалатора. Один остался стоять на ленте, другой – побежал по ней вниз. Добежав до середины эскалатора, пассажир побежал наверх и встретился со стоящим на ленте пассажиром на расстоянии 1/3 длины эскалатора от его начала. Считая, что пассажир бежал с одинаковой скоростью относительно ленты вниз и вверх, найти отношение этой скорости к скорости движения ленты.

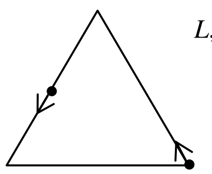
Ответ: Отношение скорости пассажира к скорости ленты равно 2.

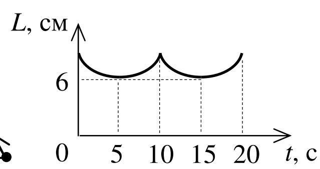
Решение: Поскольку пассажир пробежал одинаковое расстояние по ленте вниз и вверх, время его движения вниз (обозначим его через T) равно времени движения вверх. За время T бегущий пассажир сместился вниз на $L/2$ (L – длина эскалатора), стоящий на ленте пассажир сместился вниз на $L/3$ за время до встречи $2T$. Таким образом, можно составить уравнение

$$\frac{L/2}{V+u} = \frac{1}{2}\frac{L/3}{V},$$

где V – скорость движения ленты, u – скорость пассажира относительно ленты. Отсюда находим $u/V = 2$.

2. (25 баллов) Два жучка одновременно начинают движение с равными скоростями по сторонам правильного треугольника: один из вершины, другой с середины стороны (см. рис.). Зависимость от времени расстояния между жучками приведена на графике. Чему равна сторона треугольника? Чему равна скорость жучков?

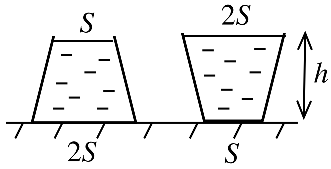




Ответ: Сторона треугольника равна 8 см. Скорость жучков равна 4 мм/с.

Решение: Из рисунка с расположением жучков ясно, что они снова окажутся на том же расстоянии друг от друга, что и в начале движения, после того, как каждый из них пройдет половину стороны треугольника. При этом из графика можно заключить, что половину стороны жучок проходит за 10 с. Тогда за первые 5 с после начала движения жучки пройдут расстояние в четверть стороны и окажутся на таком же (четверть стороны) расстоянии от ближайших к ним вершин треугольника. Соединяющий жучков отрезок прямой в момент 5 с будет параллелен основанию треугольника, а его длина будет равна 6 см (см. график). Этот отрезок будет основанием правильного треугольника со стороной равной 3/4 стороны исходного треугольника. Следовательно, сторона исходного треугольника равна 6 см · 4/3 = 8 см. Скорость жучка равна 4 см : 10 с = 4 мм/с.

3. (25 баллов) В откачанном от воздуха помещении стоят две заполненные жидкостью колбы в виде усеченных конусов (см. рис.). На сколько отличаются силы, действующие на жидкость со стороны боковых стенок в этих сосудах? Плотность жидкости равна ρ, ускорение свободного падения g. *Указание*. Объем колбы $V = hS\left(1+\sqrt{2}/3\right) \approx 1{,}47hS$.



Ответ: Силы отличаются на $\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}-1\right)\rho g h S \approx 0.06\rho g h S$.

Решение: Запишем условие баланса сил, действующих на жидкость в сужающемся кверху сосуде, в виде

$$F_{д1} = mg + F_{ст1},$$

где $F_{д1}$ – сила, с которой дно действует на жидкость, mg – действующая на жидкость сила тяжести и $F_{ст1}$ – сила со стороны стенок. Аналогично для расширяющегося кверху сосуда запишем

$$F_{д2} + F_{ст2} = mg.$$

Складывая уравнения и учитывая, что $F_{д1} = \rho g h 2S$, $F_{д2} = \rho g h S$ и $mg = \rho V g = \rho g h S\left(1+\sqrt{2}/3\right)$, получаем

$$F_{ст1} - F_{ст2} = 3\rho g h S - 2\left(1+\sqrt{2}/3\right)\rho g h S = \left(1-2\sqrt{2}/3\right)\rho g h S \approx 0{,}057\rho g h S.$$

4. (25 баллов) На дне цилиндрического сосуда лежит шар радиуса R. Когда в сосуд налили объем V воды, сила давления шара на дно уменьшилась до 4/9 от первоначального значения. После доливания такого же объема масла с плотностью 0,8 плотности воды сила давления шара на дно обратилась в нуль. Найти площадь дна сосуда. *Указание.* Объем шара $V_ш$ связан с его радиусом формулой $V_ш = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Ответ: Площадь дна сосуда равна $\frac{V}{R} + \frac{2}{3}\pi R^2$.

Решение: Запишем условие баланса действующих на шар сил до наливания воды

$$mg = N_0$$

(m – масса шара, g – ускорение свободного падения, N_0 – первоначальное значение силы давления шара на дно), после наливания воды

$$mg = \frac{4}{9}N_0 + \rho_в V_в g$$

($\rho_в$ – плотность воды, $V_в$ – объем погруженной в воду части шара) и после доливания масла

$$mg = 0 + \rho_в V_в g + 0{,}8\rho_в V_м g$$

($V_м$ – объем погруженной в масло части шара). Из записанных соотношений следует, что $V_м = V_в$. При одинаковых объемах воды и масла данное равенство может быть выполнено только в том случае, когда слои воды и масла имеют одинаковую толщину R, т.е. вода доходит до середины шара, а поверхность масла находится на уровне вершины шара. Для объема части сосуда, где находится вода и нижняя половина шара, можно записать такое равенство

$$SR = V + \frac{1}{2}V_ш = V + \frac{2}{3}\pi R^3,$$

откуда для площади дна S получаем

$$S = \frac{V}{R} + \frac{2}{3}\pi R^2.$$

7 класс

1. (30 баллов) Два пассажира одновременно вступили на ленту движущегося вниз эскалатора. Один остался стоять на ленте, другой – побежал по ней вниз. Добежав до середины эскалатора, пассажир побежал наверх и встретился со стоящим на ленте пассажиром на расстоянии 1/3 длины эскалатора от его начала. Считая, что пассажир бежал с одинаковой скоростью относительно ленты вниз и вверх, найти отношение этой скорости к скорости движения ленты.

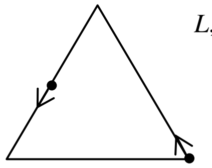
Ответ: Отношение скорости пассажира к скорости ленты равно 2.

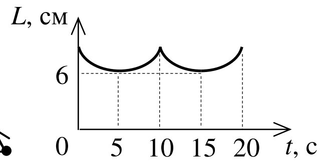
Решение: Поскольку пассажир пробежал одинаковое расстояние по ленте вниз и вверх, время его движения вниз (обозначим его через T) равно времени движения вверх. За время T бегущий пассажир сместился вниз на $L/2$ (L – длина эскалатора), стоящий на ленте пассажир сместился вниз на $L/3$ за время до встречи $2T$. Таким образом, можно составить уравнение

$$\frac{L/2}{V+u} = \frac{1}{2}\frac{L/3}{V},$$

где V – скорость движения ленты, u – скорость пассажира относительно ленты. Отсюда находим $u/V = 2$.

2. (30 баллов) Два жучка одновременно начинают движение с равными скоростями по сторонам правильного треугольника: один из вершины, другой с середины стороны (см. рис.). Зависимость от времени расстояния между жучками приведена на графике. Чему равна сторона треугольника? Чему равна скорость жучков?





Ответ: Сторона треугольника равна 8 см. Скорость жучков равна 4 мм/с.

Решение: Из рисунка с расположением жучков ясно, что они снова окажутся на том же расстоянии друг от друга, что и в начале движения, после того, как каждый из них пройдет половину стороны треугольника. При этом из графика можно заключить, что половину стороны жучок проходит за 10 с. Тогда за первые 5 с после начала движения жучки пройдут расстояние в четверть стороны и окажутся на таком же (четверть стороны) расстоянии от ближайших к ним вершин треугольника. Соединяющий жучков отрезок прямой в момент 5 с будет параллелен основанию треугольника, а его длина будет равна 6 см (см. график). Этот отрезок будет основанием правильного треугольника со стороной равной 3/4 стороны исходного треугольника. Следовательно, сторона исходного треугольника равна 6 см · 4/3 = 8 см. Скорость жучка равна 4 см : 10 с = 4 мм/с.

3. (40 баллов) При подвешивании тела на двух одинаковых легких пружинах (см. рис.) растяжение каждой из них составило 1 см. Затем одну из пружин прикрепили к телу снизу и, потянув за свободный конец, растянули ее опять на 1 см. Каким при этом стало растяжение верхней пружины?

Ответ: 3 см.

Решение: В первом случае сила упругости, действующая на груз со стороны каждой пружины, равна половине действующей на груз силы тяжести. По закону Гука сила упругости равна $F = k\Delta x$, где k – коэффициент жесткости пружины, а Δx – ее растяжение. Поскольку растяжение нижней пружины во втором случае такое же, как в первом, то эта пружина тянет груз вниз с силой, равной половине силе тяжести. Таким образом, полная направленная вниз сила на груз во втором случае равна 3/2 силы тяжести. Эту силу компенсирует упругая сила со стороны верхней пружины, следовательно, она в 3 раза больше, чем была в первом случае. А значит, ее удлинение также в 3 раза больше и составляет 3 см.